

Las transformaciones unitarias nos permiten cambiar de sistema de referencia (en el espacio \mathcal{H}).

Un operador unitario importante es el de evolución temporal para H indep de t

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$$

8.2. Los esquemas de Schrödinger y Heisenberg

- El en formalismo desarrollado anteriormente asignamos operadores independientes del tiempo a observables (posición, momento, energía cinética).
- La dinámica del sistema esta totalmente contenida en el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ (usaremos $|\psi_S(t)\rangle$ en esta sección) que obtenemos por medio de la Ec. de Schrödinger.
- A esta manera de tratar el problema se le conoce como esquema de Schrödinger.
- Las predicciones de la M.C. se expresan en términos de productos escalares entre bras y kets. Estas cantidades no cambian si aplicamos transformaciones unitarias.
- Podemos escoger U de tal modo que $|\psi_S(t)\rangle$ se transforme en un ket constante (independiente del tiempo). De ese modo encontramos el *Esquema de Heisenberg*.
- Para evitar confusión usamos S para kets en esquema de Schrödinger y H en esquema de Heisenberg. Normalmente usamos S pero no lo escribimos.
- Podemos expresar

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_S(t_0)\rangle,$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución.

- Como este operador es unitario podemos aplicar la transformación inversa para obtener un vector constante

$$|\psi_H\rangle = U^\dagger(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle = U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) |\psi_S(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle$$

Los operadores se transforman de acuerdo a

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0)$$

Calculamos el valor esperado así

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(t) &= \langle \psi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_S(t_0) | \overbrace{\hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t)}^{\text{Schrödinger}} | \psi_S(t_0) \rangle \\ &= \langle \psi_H | \underbrace{\hat{A}_H(t)}_{\text{Heisenberg}} | \psi_H \rangle \end{aligned}$$

Podemos obtener una ecuación de evol. para $A_H(t)$

When $A_S(t)$ is arbitrary, let us calculate the evolution of the operator $A_H(t)$. Using relation (4) of Complement FIII, as well as its adjoint, we obtain:

$$\rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} U = HU$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_H(t) &= -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t, t_0) H_S(t) A_S(t) U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) \frac{dA_S(t)}{dt} U(t, t_0) \\ &\quad + \frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t, t_0) A_S(t) H_S(t) U(t, t_0) \end{aligned} \quad (6)$$

In the first and last terms of this expression, let us insert between A_S and H_S the product $U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0)$, which is equal to the identity operator [formula (17) of Complement FIII]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_H(t) &= -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t, t_0) H_S(t) U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) A_S(t) U(t, t_0) \\ &\quad + U^\dagger(t, t_0) \frac{dA_S(t)}{dt} U(t, t_0) \\ &\quad + \frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t, t_0) A_S(t) U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) H_S(t) U(t, t_0) \end{aligned} \quad (7)$$

According to definition (3), we finally obtain:

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), H_H(t)] + i\hbar \left(\frac{d}{dt} A_S(t) \right)_H \quad (8)$$

Se parece mucho a $\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$ pero esta nueva es más fuerte ¿Por qué?

Constantes de movimiento (Integral de mov).

- Una constante de movimiento es un observable que no depende explícitamente del tiempo y que conmuta con H , i.e. $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ y $[A, H] = 0$.
- En un sistema conservativo H es una constante de mov.
- Al considerar esto en la Ec. 4 vemos que los valores promedio de este observable no cambian con el tiempo.
- Para una constante de movimiento A podemos encontrar una base de e.V. comunes con H . Un e.V. de A será también e.V. de H y por tanto no cambiará con el tiempo. De este modo, un estado estacionario se mantendrá como eigenestado de A y cuando midamos el observable A de este sistema en este estado siempre obtendremos el mismo resultado. A los eigenvalores de A en este caso a_n se les llama *buen número cuántico*.

$$H |\phi_{n,p}\rangle = E_n |\phi_{n,p}\rangle$$

$$A |\phi_{n,p}\rangle = a_p |\phi_{n,p}\rangle$$

- La probabilidad de obtener el resultado a_p no cambia pues

$$c_{n,p}(t) = c_{n,p}(t_0) e^{iE_n(t-t_0)/\hbar}$$

$$P(a_p, t) = \sum_n |c_{n,p}(t)|^2 = \sum_n |c_{n,p}(t_0)|^2$$

Si A_S es cte de mov, entonces A_H tampoco depende de t $A_H = U^\dagger A_S U = U^\dagger U A_S = A_S$ ($[A, H] = 0 \Rightarrow [A, U] = 0$)

Partícula 1D en potencial

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), H_H(t)] + i\hbar \left(\frac{d}{dt} A_S(t) \right)_H$$

$$H_S(t) = \frac{P_S^2}{2m} + V(X_S, t) \quad \text{usamos } \widetilde{F}(A) = F(\widetilde{A})$$

$$H_H = U^\dagger H_S U = \frac{P_H^2}{2m} + V(X_H, t)$$

$$\text{Además } [X_H, P_H] = [U^\dagger X_S U, U^\dagger P_S U]$$

$$= U^\dagger X_S U U^\dagger P_S U - U^\dagger P_S U U^\dagger X_S U = U^\dagger [X_S, P_S] U = i\hbar$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{P}_H = [P_H, H_H] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial X}(X_H, t) \quad (\text{lo hicieron de tarea})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{X}_H = [X_H, H_H] = [X_H, \frac{P_H^2}{2m}] = \frac{1}{2m} ([X_H, P_H] P_H + P_H [X_H, P_H]) = \frac{i\hbar}{m} P_H$$

$$\therefore \frac{d}{dt} X_H(t) = \frac{1}{m} P_H(t)$$
$$\frac{d}{dt} P_H(t) = -\frac{\partial V}{\partial X}(X_H(t))$$

Estas ecuaciones generalizan el teorema de Ehrenfest. (i.e. en el esquema de Heisenberg) (las eqs se parecen a las clásicas).

El esquema de interacción

$$H = H_0 + V(t) \leftarrow \begin{array}{l} \text{estructura atómica (conocida)} \\ \text{estimulación con una onda E.M.} \end{array}$$

Hay un esquema intermedio entre H y S
el esquema de interacción

$$A_I = e^{iH_0 t/\hbar} A_S e^{-iH_0 t/\hbar}$$

a diferencia de

$$A_H = e^{i(H_0 + V(t))t/\hbar} A_S e^{-i(H_0 + V(t))t/\hbar}$$

$$\Rightarrow V_I = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$$

(tarea)

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle_I = V_I |\psi\rangle_I$$

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A_I, H_0]$$

no hace falta preocuparse por H_0 para la evolución de $|\psi\rangle_I$.

	Heisenberg	Interacción	Schrödinger
ket de estado	constante	evoluciona por V_I	evoluciona por H
observable	evoluciona por H	evoluciona por H_0	constante